

Title	集合函数列の一性質（Ⅰ）
Author(s)	黒崎, 達
Citation	全国紙上数学談話会. 2(11) p.359-p.364
Issue Date	1948-11-01
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75254
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

120. 集合函數列の一性質 (I)

山梨工專 巖 崎 達 (23.9.3)

§1. 一般の空間に於て一集合 E の部分集合から成る或一つの σ -Körper を \mathcal{M} とする。以下特に断わらない限り、集合及び集合函數は常にこの \mathcal{M} にぞくするもの及びこの \mathcal{M} に於て定義されているものとする。集合函數を $\Phi(X)$ とかく

即ち
$$\Phi(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(X)$$

この様に定義された $\Phi(X)$ は 有界且 σ -加法的である。¹⁾

1) O. Nikodym, Monatshefte f. Math. u. Phys. B. 40. 1933

(以下特に断りなき限り, $index i$ は $1, 2, \dots$ をうごくものとする.)

E は 各函数 $\varphi_i(x)$ 及び $\varphi(x)$ に関し夫々次の様な二集合 P_i, N_i 及び P, N の和として表はされる.²⁾

$$x \in P_i \Rightarrow \varphi_i(x) \geq 0; \quad x \in N_i \Rightarrow \varphi_i(x) \leq 0$$

$$P_i \cap N_i = 0; \quad P_i \cup N_i = E$$

$$x \in P \Rightarrow \varphi(x) \geq 0; \quad x \in N \Rightarrow \varphi(x) \leq 0$$

$$P \cap N = 0; \quad P \cup N = E$$

$$\overline{w} = \overline{w}(\varphi; E) = \text{borne sup}_{x \in E} \varphi(x); \quad \underline{w} = \underline{w}(\varphi; E) = \text{borne inf}_{x \in E} \varphi(x)$$

$$W_i = \overline{w}_i + |\underline{w}_i|$$

及び

$$\overline{w}_i = \overline{w}(\varphi_i; E) \quad \underline{w}_i = \underline{w}(\varphi_i; E) \quad W_i = \overline{w}_i + |\underline{w}_i|$$

而して,

$$\varphi_i^+(x) = \varphi_i(P_i \cap X); \quad \varphi_i^-(x) = \varphi_i(N_i \cap X)$$

$$\varphi^+(x) = \varphi(P \cap X); \quad \varphi^-(x) = \varphi(N \cap X)$$

とかけば $\varphi^+, \varphi^-, \varphi_i^+$ 及び φ_i^- は何れもやはり σ -加法的であつて明らか

$$\text{に} \quad \overline{w} = \overline{w}^+(\varphi; E), \quad \underline{w} = \underline{w}^-(\varphi; E); \quad \overline{w}_i = \overline{w}_i^+(\varphi_i; E), \quad \underline{w}_i = \underline{w}_i^-(\varphi_i; E) \quad ^3)$$

茲で吾々は $\varphi^+(x), \varphi^-(x)$ と $\varphi_n^+(x), \varphi_n^-(x)$ との關係を考へて見よう.

先づこれに対して次の定理が成立するのは明らかである.

定理 1.

$$\varphi^+(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^+(x); \quad \varphi^-(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^-(x) \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

従つて,

$$\overline{w} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{w}_n, \quad \underline{w} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{w}_n \quad W \leq \lim_{n \rightarrow \infty} W_n \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

(証明:

$$\varphi^+(x) = \varphi(P \cap X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(P \cap X) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(P_n \cap X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^+(x)$$

$\varphi^-(x)$ についても同様

2) W. Sierpinski; *Fund. Math.* t. 5. 1924

3) H. Hahn; *Reelle Funk.* 1921 &c

R. Frank; *Fund. Math.* t. 5 1924.

そこで起る問題は 果して $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_n(x)$ が存在するときは常に $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_n^+(x)$ 及び $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_n^-(x)$ が存在して夫々 $\overline{\Phi}^+(x)$ 及び $\overline{\Phi}^-(x)$ に等しくあるか と言ふ事である。之に対する答は否定的である。即ち吾々は次の例をあげることが出来る。

例 1

[1] の μ を区間 $[0, 1]$ の可測集合の σ -Körper とし X の測度を $\mu(x)$ とかくことにする, $[0, 1]$ を 2^n 等分して得る小区間を一方の端から 順に $I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, \dots, I_{2^n}^{(n)}$ と名づけ任意の可測集合 X 及び各 n に対して

$$X_j^{(n)} = X \cap I_j^{(n)} \quad (j=1, 2, \dots, 2^n)$$

とかく。集合函数 $\overline{\Phi}_n(x)$ を

$$\overline{\Phi}_n(x) = \sum_{j=1}^{2^n} (-1)^j \mu(X_j^{(n)})$$

と定義すれば $\overline{\Phi}_n(x)$ は σ -加法的であるのみならず一般絶対連続である。而して任意の可測集合 X に対して $\overline{\Phi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_n(x) = 0$ である。一方明らかにか $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_n(p_n) = \frac{1}{2}$ であるから (1.1) 及び (1.2) の等号は成立しない。

任意の可測集合 X に対し $\overline{\Phi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_n(x) = 0$ なることの証明:—

(i) X が一つの区間であるか、又は区間の有限系列の和集合なるときは明らかである。

(ii) X が開集合である場合。

$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ 茲に $\{J_i\}$ は何れの二つも高々端点を共有する様な閉区間の列であつて $\mu(J_i) \geq \mu(J_{i+1})$ であると考えよう。而して $\mu(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(J_i)$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(J_i) = 0$ である。正整数 S に対して、

$$\mu(X) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^S J_i\right) = \varepsilon_S$$

とおけば 正数列 $\{\varepsilon_S\}$ は、単調に 0 に収斂する。

$$\overline{\Phi}_n(X) = \overline{\Phi}_n\left(\bigcup_{i=1}^S J_i\right) + \overline{\Phi}_n\left(X - \bigcup_{i=1}^S J_i\right)$$

$\overline{\Phi}_n(X)$ の定義により任意の可測集合 A に対し $|\overline{\Phi}_n(A)| \leq \mu(A)$

$$\therefore |\overline{\Phi}_n(X)| \leq |\overline{\Phi}_n\left(\bigcup_{i=1}^S J_i\right)| + \mu\left(X - \bigcup_{i=1}^S J_i\right)$$

$n \rightarrow \infty$ ならしめれば

$$|\overline{\Phi}(X)| \leq \varepsilon_S$$

之はすべての S に対して成立し且 $\lim_{S \rightarrow \infty} \varepsilon_S = 0$ であるから

$$\overline{\mu}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu}_n(X) = 0$$

(iii) X が任意の可測集合である場合

任意の正数 ε に対して $G \supset X$ 且 $\mu(G - X) < \varepsilon$ である様な開集合 G が存在する。

$$\overline{\mu}_n(X) = \overline{\mu}_n(G) - \overline{\mu}_n(G - X)$$

$$|\overline{\mu}_n(X)| \leq |\overline{\mu}_n(G)| + \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu}_n(G) = 0 \quad \varepsilon \text{ は任意の正数であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu}_n(X) = 0$$

(終)

例2

例1の $\overline{\mu}_n(X)$ の代りに

$$\overline{\mu}_{2n-1}(X) = \overline{\mu}_{2n-1}(X) \quad \overline{\mu}_{2n}(X) = \frac{1}{2} \overline{\mu}_{2n}(X)$$

とすれば $\{n\}$ に変りはなく

$$\overline{\mu}(P) < \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu}_n(P_n) < \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \overline{\mu}_n(P_n)$$

となる。

注意

1° 上記と似た例では $\overline{\mu}(X)$ が恒等的に 0 であるから P と N が不定であるが、 $P \cup N = [0, 1]$, $P \cap N = \emptyset$ なる二集合 P, N をとりさへすれば定義 (1.1) の下で、この例を少しく修正して P と N とが確定する様にすることは容易である。

2° 例 1.2 にあれば $\{\overline{\mu}_n(X)\}$ 或は $\{\underline{\mu}_n(X)\}$ が一般絶対連続であつても (1.1) (1.2) の等号は成立しないことが知られる。絶対連続集合函数は有限測度の集合、又はこの様な集合の可測函数列の和集合に対しては不定積分で表はされる。⁴⁾ 例 1.2 は不定積分の列が任意の可測集合に対して収束しても被積分函数の列は必ずしも収束しない一つの例を与へてゐる。

§2 点. 定理1の段係に就て次の結果が得られた。

定理2

集合 X に対して

$$\overline{\mu}^+(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu}_n^+(X); \quad \overline{\mu}^-(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu}_n^-(X) \dots \dots (1.3)$$

となる時には X の任意の部分集合に対して同じ関係が成立する。

(証明)

(1.3) の二つの等式のうち一方が成立すれば他は当然成立するから 最初の部分だけを考へる。即ち

$$\overline{\alpha}^+(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\alpha}_n^+(X) \dots\dots\dots (1.4)$$

であるとする。それにもかゝらず X の一部分集合 A に対しては (1.4) の関係は成り立たないと仮定すると二つの場合が考へられる。即ち

(i) $\{\overline{\alpha}_n^+(A)\}$ が収斂しない か 又は

(ii) $\{\overline{\alpha}_n^+(A)\}$ は収斂するが $\overline{\alpha}^+(A) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\alpha}_n^+(A)$ である。

(i) の場合

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \overline{\alpha}_n^+(A) = a \text{ とおけば}$$

$$a = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \overline{\alpha}_n^+(A) > \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\alpha}_n^+(A) \geq \overline{\alpha}^+(A)$$

従つて増加自然数列 $\{n_v\} (v=1, 2, \dots)$ が存在して

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \overline{\alpha}_{n_v}^+ = a > \overline{\alpha}^+(A)$$

今 $A \cap B = \emptyset$ なる一集合 B を任意にとれば、仮に $\{\overline{\alpha}_n^+(A \cup B)\}$ が収斂するとしても、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\alpha}_n^+(A \cup B) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \{\overline{\alpha}_{n_v}^+(A) + \overline{\alpha}_{n_v}^+(B)\} = 0 + \lim_{v \rightarrow \infty} \overline{\alpha}_{n_v}^+(B) \\ &\geq a + \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\alpha}_n^+(B) > \overline{\alpha}^+(A) + \overline{\alpha}^+(B) = \overline{\alpha}^+(A \cup B) \end{aligned}$$

$\{\overline{\alpha}_n^+(A \cup B)\}$ が収斂しなければ当然であるが $\{\overline{\alpha}_n^+(A \cup B)\}$ が収斂しても集合 $A \cup B$ に対しては (1.4) の関係は成立しないことが知られた。 B は A と互に素なる任意の集合であつたら今 A の X に関する補集合を B にとれば $A \cup B = X$ に対して (1.4) が成り立たないことになる。之は明らかに矛盾である。

(ii) の場合も殆んど全様の論法で矛盾に到達する。

(終)

系

$$\overline{W} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{W}_n, \quad \underline{W} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{W}_n \dots\dots\dots (1.5)$$

である時には任意の集合 X に対して (1.3) が成り立つことが必要にして且十分である。

定理 3

この二つの条件の少くとも一方が与えられるならば (1.5) は成立つ。

- (i) $\{\varpi_n(P_v)\}$ ($v=1, 2, \dots$) が n に関して一様に $\varpi_n(P)$ に収斂する。
 (ii) $\{\varpi(P_\mu)\}$ が $\varpi(P)$ に収斂し、 $\{\varpi_n(P_v)\}$ ($n=1, 2, \dots$) が v に関して一様に $\varpi(P_v)$ に収斂する。

(証明)

(i) の方だけを考へる。収斂の一屬性から 正数 ε が与えられたとき 2 に対して充分大なる n_0 をとれば $n \geq n_0$ なるすべての n に対し

$$|\varpi_n(P_n) - \varpi(P)| \leq |\varpi_n(P_n) - \varpi_n(P)| + |\varpi_n(P) - \varpi(P)| < \varepsilon \quad \text{たらしめ得る。} \quad (\text{終})$$

注意

$\bar{P} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n}$, $\underline{P} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n}$; $\bar{N} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} N_n}$, $\underline{N} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} N_n}$ とおけば
 任意の集合 X に対し、一般に

$0 \leq \varpi(P \cap X) \leq \varpi(P) \leq \varpi(P)$; $\varpi(\bar{P}) \leq \varpi(P)$; $\varpi(\underline{P} \cap N \cap X) = 0$ なることが云へるが、 $\varpi(\bar{P})$ と $\varpi(P)$ の大小は定まらない。大小関係が反対になる様な例を與へ得る、(1.5) が成り立つ場合は $\varpi(P \cap \bar{P}) = \varpi(P)$ となる。
 $N, \bar{N}, \underline{N}$ に同じでも上と對稱の結果が出る。 (終)